円板内の重調和作用素に対するグリーン関数とポアッソン関数 (可積分系研究の新展開 : 連続・離散・超離散)

亀高, 惟倫; 竹居, 賢治; 永井, 敦

数理解析研究所講究録 1302 巻 2003 年 60-67

円板内の重調和作用素に対する グリーン関数とポアッソン関数

亀高惟倫 (Yoshinori KAMETAKA)
竹居賢治 (Kenji TAKEI)
永井 敦 (Atsushi NAGAI)

大阪大学大学院基礎工学研究科 数理科学分野

2 次元平面内の半径 R の円板内部で重調和作用素に対する 1 パラメータ自己共役境界値問題を考える.

BVP(ε)

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x) & (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < R^2) \\ u(x) = u_0(|x|^{-1}x) & (|x| = R) \\ ((1-\varepsilon)D + \varepsilon D^2)u(x) = u(|x|^{-1}x) & (|x| = R) \end{cases}$$

$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = r^{-2}(D^2 + \partial_\theta)$, $D = r\partial_r$, $\varepsilon \neq -1/(2m+1)$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ とする.

十分滑らかなデータ $f(x)$, $u_{0,0}(x)$, $u_{0,1}(x)$ に対して BVP(ε) は唯一の解を持ち次のように表示される.

$$u(x) = \int_{|y|<R} G(\varepsilon; x, y)\, f(y)\, dy + \sum_{j=0}^{1} \int_{|\eta|=1} P_j(\varepsilon; x, R\eta)\, u_{0,j}(\eta)\, dS(\eta)$$

グリーン関数 $G(\varepsilon; x, y)$ とポアッソン関数 $P_j(\varepsilon; x, y)$ $(j = 0, 1)$ を求めその性質を詳しく調べた. 本小論[1]では紙数の都合で結果のみを述べる.

---

[1]研究集会では多重調和作用素について報告をしたが, ここでは簡単のために一番簡単な重調和作用素に

極座標を導入し次のような記号を使用する.

$$x = (x_1, x_2) = r(\cos\theta, \sin\theta), \quad y = (y_1, y_2) = s(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 = rs\cos(\theta - \varphi)$$

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2} = r, \quad |y| = (y \cdot y)^{1/2} = s$$

$$\Phi = \Phi(x, y) = |x - y|^2 = r^2 - 2rs\cos(\theta - \varphi) + s^2$$

$$\Psi = \Psi(x, y) = R^{-2}(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2) = R^{-2}(R^2 - r^2)(R^2 - s^2)$$

$$r \vee s = \max\{r, s\} = (r + s + |r - s|)/2$$

$$r \wedge s = \min\{r, s\} = (r + s - |r - s|)/2$$

最も重要な場合 ($\varepsilon = 0$) のグリーン関数は T.Boggio [1] によって求められた.

定理 1 *(T.Boggio)*

(1) $16\pi G(0; x, y) = \Psi^2 \Phi^{-1} \int_0^1 (1 + \Phi^{-1}\Psi\sigma)^{-1}\, \sigma\, d\sigma$

極座標で表すと,

(2) $16\pi G(0; x, y) =$

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \{rs(\rho^{-1} + \rho) - (r^2 + s^2)\} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} \rho^{-1}\, d\rho$$

ただし

$$\rho_0 = \frac{rs}{R^2}, \quad \rho_1 = \frac{r \wedge s}{r \vee s}$$

さらに具体的に表すと,

(3) $16\pi G(0; x, y) = R^{-2}(R^2 - r^2)(R^2 - s^2) -$

$$(r^2 - 2rs\cos(\theta - \varphi) + s^2) \log \frac{R^2 - 2rs\cos(\theta - \varphi) + R^{-2}r^2 s^2}{r^2 - 2rs\cos(\theta - \varphi) + s^2}$$

以下我々の結果を述べる.

定理 2 $-\infty < \varepsilon < -1$ 又は $0 < \varepsilon < \infty$ のとき

$$16\pi\,(G(\varepsilon;x,y) - G(0;x,y)) = \Psi(x,y)h_0(\varepsilon;x,y)$$

$$h_0(\varepsilon;x,y) = \int_0^1 h_1(\sigma x, y)\sigma^{\delta-1}\,d\sigma =$$

$$\int_0^1 \left.\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^2}\right|_{t=R^{-2}rs\sigma} \sigma^{\delta-1}\,d\sigma$$

ここで $\delta = \delta(\varepsilon) = (\varepsilon^{-1}+1)/2$ である．また

$$h_1(x,y) = \frac{|y^*|^2 - |x|^2}{|y^* - x|^2} = \frac{|x^*|^2 - |y|^2}{|x^* - y|^2}$$

となるが，$y^* = R^2|y|^{-2}y$ は y の鏡像である．$\varepsilon = 1$ のときには上の積分を具体的に求めることができるが，ここでは省略する．このことから次の結論が従う．

定理 3 $-\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 < -1$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ とすると，$|x|, |y| < R$ に対して次の不等式が成立する．

$$0 < G(0;x,y) < G(\varepsilon_0;x,y) < G(\varepsilon_1;x,y) <$$

$$G(+\infty;x,y) = G(-\infty;x,y) < G(-\varepsilon_2;x,y) < G(-\varepsilon_3;x,y)$$

ポアッソン関数は純正ポアッソン関数 $P(x,y)$ を使って表示される．

ポアッソン問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (|x| < R) \\ u(x) = u_0(|x|^{-1}x) & (|x| = R) \end{cases}$$

の解はポアッソン関数 $P(x,y)$ を使って

$$u(x) = \int_{|\eta|=1} P(x, R\eta)u_0(\eta)\,dS(\eta)$$

と表示される.

$$x = (x_1, x_2) = r(\cos\theta, \sin\theta), \quad y = (y_1, y_2) = R(\cos\varphi, \sin\varphi)$$
$$r = |x| < R, \quad |y| = R$$

とするとき,

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{\sqrt{-1}k(\theta-\varphi)}$$

となる.

次のような記号を準備する.

$$a_0(D) = D, \quad a_1(D) = D + 2$$
$$A(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_0(D) & a_1(D) \end{pmatrix}$$

このとき $A^{-1}(D)$ は擬微分作用素ではなくて微分作用素であって,

$$A^{-1}(D) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1(D) & -1 \\ -a_0(D) & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 以上より次のようなポアッソン関数の表示を得る.

定理 4 $\varepsilon = 0$ のとき

$$(P_0, P_1)(0; x, y) = (1, X)A^{-1}(D)P(x,y)$$

ここで $X = (r/R)^2$, $r = |x|$ である.

一般の場合には,

定理 5 $-\infty < \varepsilon < -1$ 又は $0 < \varepsilon < \infty$ のとき

$$(P_0, P_1)(\varepsilon; x, y) - (P_0, P_1)(0; x, y) =$$
$$\frac{1}{4}(1 - X)\,{}^t\alpha(D)A^{-1}(D)\int_0^1 P(\sigma x, y)\,\sigma^{\delta-1}\,\sigma$$

ここで ${}^t\alpha(D) = (\alpha_0, \alpha_1)(D)$, $\alpha_j(D) = a_j^2(D) - a_j(D)$ $(j = 0, 1)$, $\delta = (\varepsilon^{-1} + 1)/2$ である.

これらのポアッソン関数がポアッソン関数として機能することは次の構造定理から解る.

定理 6 $\varepsilon = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 \\ D \end{pmatrix} (P_0, P_1)(0; x, y) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(x, y) - (1 - X) \begin{pmatrix} 1 \\ a_1(D) \end{pmatrix} (0, 1)\, A^{-1}(D)\, P(x, y)$$

一般の場合

定理 7 $-\infty < \varepsilon < -1$ 又は $0 < \varepsilon < \infty$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (1 - \varepsilon)D + \varepsilon D^2 \end{pmatrix} (P_0, P_1)(\varepsilon; x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(x, y) -$$
$$(1 - X) \begin{pmatrix} 1 \\ a_1(D) + \varepsilon\alpha_1(D) \end{pmatrix} \Big[(0, 1)A^{-1}(D)P(x, y) -$$
$$\tfrac{1}{4}\,{}^t\alpha(D)A^{-1}(D)\textstyle\int_0^1 P(\sigma x, y)\sigma^{\delta-1}\,d\sigma\Big]$$

グリーン関数 $G(0; x, y)$, $G(\varepsilon; x, y)$ が要求されている境界条件をみたしている事を確認するためには, 上にかかげたポアッソン関数の構造定理に相当する定理が必要で, そのことが最も重要なことであるがここでは述べない.

証明の方針だけを述べる. $u(r,\theta)$ の θ に関するフーリエ係数を

$$\widehat{u}(r,k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)e^{-\sqrt{-1}k\varphi}\,d\varphi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

とする. データ関数について同様にフーリエ係数を定義して, 偏微分方程式に対する境界値問題を次のように可算個の常微分方程式に対する境界値問題に変換する. $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ に対して,

$$\begin{cases}((D-2)^2-k^2)(D^2-k^2)\widehat{u}(r,k)=r^4\widehat{f}(r,k) & (0\le r<R)\\ \widehat{u}(R,k)=\widehat{u}_{0,0}(k) \\ ((1-\varepsilon)D+\varepsilon D^2)\widehat{u}(r,k)\Big|_{r=R}=\widehat{u}_{0,1}(k)\end{cases}$$

これは 4 階線形定数係数の問題で境界点 $r=0$ は極座標を導入したために出現したものである. 新しい変数 t を

$$r=e^t,\quad t=\log r$$

により導入すると,

$$D=r\partial_r=\partial_t$$

となる. さらに

$$u(t)=\widehat{u}(e^t,k),\quad f(t)=e^{4t}\widehat{f}(e^t,k)$$

$$u_{0,j}=\widehat{u}_{0,j}(k)\quad(j=0,1),\quad \kappa=|k|$$

として, $\wedge$ と k を省略すると, 解くべき境界値問題は次のようになる.

BVP^(ε)

$$\begin{cases}p(D)u=f(t) & (-\infty<t<T=\log R)\\ u(T)=u_{0,0} \\ ((1-\varepsilon)D+\varepsilon D^2)u(t)\Big|_{t=T}=u_{0,1}\end{cases}$$

ここで $p(\lambda) = ((\lambda-2)^2-\kappa^2)(\lambda^2-\kappa^2)$ である.

新たに出現した境界点 $t=-\infty$ は上の微分方程式に対して特異点であり, そこにはかくれた境界条件がある. それは, 元の偏微分方程式の解 $u(x)$ がなめらかということから導かれる.

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{4} p_j \lambda^j$$
$$p_0 = \kappa^2(\kappa^2-4), \quad p_1 = 4\kappa^2, \quad p_2 = -2(\kappa^2-2), \quad p_3 = -4, \quad p_4 = 1$$

とテーラー展開する. 新しい未知関数 $u_i = D^i u$ $(0 \le i \le 3)$, $D = d/dt$ を導入すると, 解くべき問題は $u = {}^t(u_0, u_1, u_2, u_3)$ に対して,

$$\begin{cases} u' = Au + {}^t(0,0,0,1)f(t) \qquad (-\infty < t < T) \\ u_0(T) = u_{0,0} \\ (1-\varepsilon)u_1(T) + \varepsilon u_2(T) = u_{0,1} \end{cases}$$

となる.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$$

である.

$$p(\lambda) = \prod_{j=0}^{3} (\lambda - a_j)$$

と因数分解するとき特性根 a_j は

$$a_0 = \kappa, \quad a_1 = \kappa+2, \quad a_2 = 2-\kappa, \quad a_3 = -\kappa$$

となる. A のジョルダン標準形 $\widehat{A}$ を求めなければならないが, Case 1 ($\kappa \ge 3$), Case 2 ($\kappa = 2$), Case 3 ($\kappa = 1$), Case 4 ($\kappa = 0$) の 4 つの場合に分けて考える.

Case 1,2 では $a_1 > a_0 > a_2 > a_3$ となり特性根は相異なる. このときは $\widehat{A}$ は 対角行列となる. Case 2 では $a_2 = 0$ となることに注意しなければならない. Case 3 では

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 1, -1)$$

となる. 一組の重根 $a_0 = a_2 = 1$ をもつ. Case 4 では

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 2, 0)$$

となり二組の重根 $a_0 = a_3 = 0$, $a_1 = a_2 = 2$ を持つ.

このように重根が表われたり, 0 が特性根となる場合には注意深い取り扱いが必要となる. 特にかくれた境界条件をどのように引き出すかが重要である. 詳しい証明は非常に長い議論が必要とされる為に現在執筆中の英文論文 [3][4] を見ていただきたい.

References

[1] T.Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m*, Rend. Circ. Mat. Palermo **20** (1905), 97-135.

[2] H.-Ch. Grunau, G. Sweers, *Sharp estimates for iterated Green functions*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **132A** (2002), pp.91-120.

[3] Y.Kametaka, K.Takei, A.Nagai, *Poisson functions for a biharmonic operator on a disk*, in preparation.

[4] Y.Kametaka, K.Takei, A.Nagai, *Green function for a biharmonic operator on a disk*, in preparation.